



Une méthode d'identification en dynamique des structures basée sur le filtre de Kalman et l'erreur en relation de comportement

Albert Alarcon, Charles Bodel, Marc Bonnet

► To cite this version:

Albert Alarcon, Charles Bodel, Marc Bonnet. Une méthode d'identification en dynamique des structures basée sur le filtre de Kalman et l'erreur en relation de comportement. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. 8 p. ; Clé USB. hal-00592856

HAL Id: hal-00592856

<https://hal.science/hal-00592856>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une méthode d'identification en dynamique de structures basée sur le filtre de Kalman et l'erreur en relation de comportement

A. Alarcón^{1,2}, C. Bodel², M. Bonnet¹

¹Laboratoire de Mécanique des Solides (LMS), CNRS UMR 7649, École Polytechnique, Palaiseau, France

²EDF R&D, Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles Durables, UMR CNRS/EDF 2832, France
email: albert.alarcon@edf.fr, charles.bodel@edf.fr, bonnet@lms.polytechnique.fr

Résumé — Ce travail est issu de la problématique industrielle d'EDF autour du comportement dynamique des structures en présence de méconnaissances de modèle. On propose une méthode basée sur l'utilisation conjointe du filtre de Kalman *Unscented* et de l'erreur en relation de comportement pour localiser et identifier les paramètres structuraux permettant de mieux représenter des mesures physiques. Un exemple numérique d'une poutre en béton contenant à la fois de l'endommagement structural et des défauts de modélisation des conditions aux limites est présenté.

Mots clés — Erreur en Relation de Comportement ; Filtre de Kalman *Unscented* ; Dynamique ; Identification

1 Motivation générale

Ce travail est issu de la problématique industrielle d'EDF autour du comportement dynamique des structures en présence de méconnaissances de modèle pour lesquels l'utilisation de mesures expérimentales permet d'améliorer la connaissance de ceux-ci. Il est notamment motivé par la prise en compte de systèmes évolutifs, où les lois d'évolution ne sont pas nécessairement connues *a priori* tel, par exemple, l'évolution de l'endommagement lors d'un séisme.

La méthode proposée consiste à combiner l'erreur en relation de comportement (ERC) et le filtre de Kalman *Unscented* (UKF). Elle se structure pour ce faire en deux parties :

1. La première consiste à faire une identification spatiale des zones de défaut au moyen de l'ERC.
2. La deuxième consiste à résoudre le problème d'identification grâce au filtre de Kalman *Unscented* appliqué à une description d'espace d'état de l'ERC.

Cette communication rappelle, tout d'abord, les méthodes d'ERC ainsi que le UKF, pour ensuite décrire la méthode d'utilisation conjointe. Enfin, un exemple numérique basé sur le comportement dynamique d'une poutre en béton permet d'illustrer l'adéquation de la méthode au but recherché.

2 L'erreur en relation de comportement

Les méthodes d'ERC mesurent l'écart entre un modèle mathématique et des mesures au moyen de fonctions coût énergétiques. Introduites initialement par P. Ladevèze dans [12] dans le but d'évaluer la qualité de la solution d'un modèle EF, elles ont rapidement évolué comme méthodes d'identification paramétrique en analyse modale [10], en vibrations forcées [11, 3] ou dans le domaine temporel [4, 5, 13]. Ces méthodes présentent des avantages particulièrement intéressants, comme son excellente capacité à localiser spatialement des défauts structuraux [1], une très grande robustesse vis-à-vis des bruits de mesure [5], ou encore des bonnes propriétés de convexité des fonctions coût [6].

Formulation de l'erreur en relation de comportement en dynamique. Considerons une structure occupant un espace Ω dans un intervalle de temps $[0, T]$ régie, dans le domaine fréquentiel, par les relations de comportement suivantes :

$$\begin{cases} \sigma = K\varepsilon + i\omega C \\ \Gamma = -\rho\omega^2 u \end{cases}$$

où K et C sont respectivement les opérateurs de Hooke et d'amortissement et ε représente le tenseur de déformations.

La formulation de l'ERC présentée ici est basée sur l'expression de l'erreur de Drucker pour un couple de solutions admissibles du problème par :

$$\xi_{\Omega\omega}^2(u, v, w) = \int_{\Omega} \frac{\gamma}{2} \text{tr}[(K + T\omega^2 C)(\varepsilon(v) - \varepsilon(u))^*(\varepsilon(v) - \varepsilon(u))] + \frac{1-\gamma}{2} \rho \omega^2 (u - w)^*(u - w) d\Omega \quad (1)$$

où $*$ représente le complexe conjugué et les champs cinématiquement et dynamiquement admissibles sont choisis de sorte que :

$$\begin{cases} u_c = u \\ \sigma_d = K\varepsilon(v) + j\omega C\varepsilon(v) \\ \Gamma_d = -\rho\omega^2 w \end{cases} \quad (2)$$

De ce fait, la discretisation dans un espace Elements Finis de (1) et (2) conduit à la construction de la fonctionnelle d'erreur en relation de comportement suivante :

$$e_{\Omega\omega}^2(\{u\}, \{v\}, \{w\}) = \frac{\gamma}{2} \{u - v\}^T [\mathbf{K} + T\omega^2 \mathbf{C}] \{u - v\} + \frac{1-\gamma}{2} \{u - w\}^T \omega^2 [\mathbf{M}] \{u - w\} + \frac{r}{1-r} \{\Pi u - \tilde{u}\}^T [\mathbf{G}_r] \{\Pi u - \tilde{u}\} \quad (3)$$

où $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{C}]$ et $[\mathbf{K}]$ sont, respectivement, les matrices de masse, amortissement et raideur du modèle. Par ailleurs, $\{\tilde{u}\}$ représente un jeu de mesures dans Ω , Π un opérateur de projection dans l'espace d'observation et $[\mathbf{G}_r]$ une matrice symétrique définie positive. Bien que le choix de $[\mathbf{G}_r]$ n'est pas critique, elle est généralement choisie de sorte à introduire une grandeur de type énergétique dans la fonction coût :

$$[\mathbf{G}_r] = \frac{\gamma}{2} [[K_r] + T\omega^2 [C_r]] + \frac{1-\gamma}{2} \omega^2 [M_r]$$

où “ r ” indique la matrice réduite de Guyan dans l'espace d'observation.

Dans le cas où l'on s'intéresse à une plage de fréquences $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ et supposant que la structure est composée par un ensemble de sous-structures $\Omega_s \in \Omega$, la fonctionnelle d'erreur en relation de comportement modifiée normalisée est donnée par :

$$e_N^2 = \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \eta(\omega) \left(\sum_{\Omega_s \in \Omega} \frac{e_{\Omega_s\omega}^2(\{u\}, \{v\}, \{w\})}{D_{\omega}^2(\{u\})} \right) d\omega \quad (4)$$

où $\eta(\omega)$ est une fonction de pondération telle que :

$$\int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \eta(\omega) d\omega = 1 \quad \eta(\omega) \geq 0$$

et $D_{\omega}^2(\{u\})$ est une valeur d'énergie de référence définie par :

$$D_{\omega}^2(\{u\}) = \frac{\gamma}{2} \{u\}^T [\mathbf{K} + T\omega^2 \mathbf{C}] \{u\} + \frac{1-\gamma}{2} \{u\}^T \omega^2 [\mathbf{M}] \{u\}$$

Ainsi, étant donné un jeu de mesures $\{\tilde{u}\}$, l'obtention des champs cinématiquement et dynamiquement admissibles qui minimisent (3) est issue de la résolution d'un système d'équations linéaires (se référer à [3] pour les détails de cette formulation).

Problème d'optimisation associé à l'ERC. En tenant compte des propriétés de localisation de défauts de modélisation de l'ERC, la phase d'identification basée sur l'ERC est constituée de deux étapes. La première consiste à localiser les zones de la structure où le comportement est le moins bien représenté par le modèle. Pour ce faire, on utilise la valeur de e_N^2 proposée dans (4) comme indicateur de la qualité du modèle vis-à-vis des mesures. Ceci permet d'identifier et choisir un nombre réduit de paramètres $\theta \in \Theta$ à optimiser paramétrisant $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{C}]$ et $[\mathbf{K}]$ pour les régions de défaut identifiées. Ainsi, le problème d'identification s'écrit :

$$\text{Trouver } \hat{\theta} \in \Theta \text{ qui minimise } e_N^2(\theta) \quad (5)$$

En général, ceci conduit à un problème d'optimisation non lineaire que nous proposons de résoudre avec le Filtre de Kalman Unscented.

3 Le filtre de Kalman Unscented pour la résolution du problème d'optimisation de l'ERC modifiée

Le filtre de Kalman fut introduit par R.E. Kalman en 1960 [9] comme solution optimale au problème de filtrage récursif dans le cadre linéaire dans une structure de type prédiction-correction. Depuis, d'innombrables applications ont vu le jour. En particulier, de nombreuses techniques se sont inspirées de ce formalisme dans le but de traiter la problématique dans le cadre non-linéaire, notamment le très populaire filtre de Kalman étendu (EKF). Le filtre de Kalman Unscented (UKF) a ensuite été proposé par Julier et Uhlmann [7, 8] en 1997 pour remédier à certaines insuffisances du filtre de Kalman étendu. En effet, ce dernier est construit par linéarisation des opérateurs du modèle d'état, ce qui peut conduire dans de nombreux cas à des problèmes de précision et stabilité [2]. Le UKF est basé sur la transformation mathématique dite *Unscented*, qui propage un nuage de points de taille minimale à travers les vraies fonctions d'état, ce qui permet de représenter correctement les non-linéarités de modèle jusqu'au second ordre tout en évitant le calcul explicite de Jacobiens ou de hessiens.

Formulation du filtre de Kalman Unscented. Considerons une variable aléatoire $x \in R^n$ de moyenne \bar{x} et covariance P_x . On définit, par ailleurs, l'ensemble $S_x = \{X, W\}$ constitué d'un nuage de points X , appelés points sigma, et de facteurs de pondération associés W définis par

$$\begin{aligned} [X]_0 &= \bar{x} \\ [X]_i &= \bar{x} + (\sqrt{(n+\lambda)P_x})_i \quad i = 1, \dots, n, \\ [X]_i &= \bar{x} - (\sqrt{(n+\lambda)P_x})_i \quad i = n+1, \dots, 2n \end{aligned} \quad (6)$$

(où $(\sqrt{P_x})_i$ représente la $i^{\text{ème}}$ colonne de la décomposition de Cholesky de P_x) et

$$\begin{aligned} W_0^m &= \frac{\lambda}{n+\lambda} \\ W_0^c &= \frac{\lambda}{n+\lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta \\ W_i^m &= W_i^c = \frac{1}{2(n+\lambda)}, \quad i = 1, \dots, 2n. \end{aligned} \quad (7)$$

où $\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n$ est un paramètre d'échelle. La constante α détermine l'étendue des points sigma autour de \bar{x} , tandis que β permet d'incorporer de l'information *a priori* sur la distribution de x , et κ constitue un paramètre d'échelle secondaire. Ainsi, la transformation Unscented approche la moyenne et la covariance de la variable z ayant subi une transformation non-linéaire $z = f(x)$ par les statistiques *a posteriori* suivantes :

$$\bar{z} \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^m [Z]_i \quad P_z \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^c ([Z]_i - \bar{z})([Z]_i - \bar{z})^T \quad (8)$$

où $[Z]_i = f([X]_i)$ est le $i^{\text{ème}}$ point sigma ayant subi la transformation $f(\cdot)$.

Le filtre de Kalman *Unscented* exploite directement (6), (7) et (8) dans le cadre du filtrage récursif. Pour le décrire, considérons un système dynamique non-linéaire discret régi par l'équation d'état :

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k) + v_k \\ y_k = h(x_k) + \eta_k \end{cases} \quad (9)$$

où x_k est le vecteur d'état à l'instant $t = k\Delta t$, v_k est un bruit centré de covariance Q_k , y_k représente le vecteur d'observation à l'instant $t = k\Delta t$ et η_k est un bruit d'observation centré de covariance R_k .

Ainsi, les équations de l'UKF appliquées à (9) deviennent :

A Initialisation

$$\hat{x}_0 = \mathbf{E}[x_0] \quad P_0 = \mathbf{E}[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]$$

B Prédiction pour $k \in [1 \dots \infty]$

1. Construction d'un nuage sigma autour de \hat{x}_{k-1}

$$S_x^{k-1} = \{X_{k-1}, W_{k-1}\}$$

2. Propagation du nuage sigma à travers la fonction non linéaire $F(\cdot)$

$$[X_k]_i = F([X_{k-1}]_i)$$

3. Calcul des statistiques *a priori* sur la moyenne et la covariance

$$\hat{x}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m [X_k]_i$$

$$P_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c (([X_k]_i - \hat{x}_k^-)([X_k]_i - \hat{x}_k^-)^T) + Q_k$$

4. Construction de l'observation *a priori*

$$\hat{y}_k = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m h([X_k]_i)$$

C Correction pour $k \in [1 \dots \infty]$

1. Correction de la moyenne

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(y_k - \hat{y}_k)$$

2. Correction de la covariance

$$P_k = P_k^- + K_k P_k^{yy} K_k^T$$

avec

$$K_k = P_k^{xy} (P_k^{yy})^{-1}$$

$$P_k^{xy} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c (([X_k]_i - \hat{x}_k^-)(h([X_k]_i) - \hat{y}_k)^T)$$

$$P_k^{yy} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c ((h([X_k]_i) - \hat{y}_k)(h([X_k]_i) - \hat{y}_k)^T)$$

4 Résolution du problème de l'ERC modifiée avec le UKF

Dans cette partie, nous détaillons comment les équations du filtre de Kalman, et en particulier celles du UKF, peuvent être utilisées pour résoudre un problème d'identification en dynamique des structures. Dans notre cas, nous proposons de résoudre le problème défini par (5) afin de bénéficier des propriétés de localisation des défauts et convexité des fonctions coût associés à l'ERC. L'idée principale est de reconsidérer la formulation d'espace d'état de notre système proposé dans (9) en changeant la norme de l'espace d'observation. Pour ce faire, on propose de changer la mesure d'écart entre la réponse de modèle et les observations par une fonction coût de type (4) au lieu d'un écart aux moindres carrés typiquement utilisé dans les problèmes de filtrage.

Pour ce faire, le vecteur d'état est constitué des paramètres à identifier θ et, dans l'hypothèse de stationnairté, la fonction d'évolution devient l'identité. Ainsi, le problème d'identification (5) peut s'écrire dans une formulation d'espace d'état de la sorte :

$$\begin{cases} \theta_{j+1} = \theta_j + w_j^\theta \\ \zeta_j = e_N^2(\theta_j) + v_j \end{cases} \quad (10)$$

où w_j^θ et v_j représentent des bruits centrés jouant un rôle important dans le processus d'identification. L'application de l'UKF au formalisme (10) aura donc tendance à minimiser l'écart $(\zeta_j - e_N^2(\theta_j))^2$ au fur et à mesure que le processus évolue. Ainsi, on peut interpréter ζ_j comme une valeur cible et, en cherchant le minimum de la fonctionnelle $e_N^2(\theta_j)$, cela nous conduit à poser : $\zeta_j = 0 \quad \forall j$.

5 Résultats numériques

L'expérience numérique que l'on décrit dans ce chapitre consiste à localiser et identifier les défauts d'un modèle EF grâce à l'utilisation conjointe de l'ERC et de l'UKF proposée dans la Sec. 4. Le modèle de référence, simulant une poutre en béton bi-encastree et excitée par un bruit blanc F , est illustré dans la

figure 1. La structure a une longueur de 3,75m et une section rectangulaire constante de $0,22\text{m} \times 0,15\text{m}$. Par ailleurs, le module d'Young, la masse volumique et le coefficient de Poisson sont, respectivement, $E = 20 \cdot 10^9 \text{N/m}^2$, $\rho = 7800 \text{Kg/m}^3$ et $\nu = 0,3$.

On considère un modèle numérique de départ ayant des caractéristiques mécaniques homogènes et des conditions aux limites parfaites. En revanche, les mesures sont obtenues par un modèle EF qui, lui, contient, d'une part, de l'endommagement structural modélisé comme une perte de module d'Young :

$$E = (1 - \delta)E_0,$$

(avec $\delta = 0.85$) et, d'autre part, un encastrement imparfait, modélisé par l'ajout d'une impédance de type :

$$H(\omega) = -\omega^2 m + k$$

avec $k = 10^7 \text{N/m}$ et $m = 33 \text{Kg}$. Les mesures sont obtenues par simulation du modèle "imparfait" sur un jeu de sept capteurs auxquels on rajoute un bruit centré gaussien de 5%.

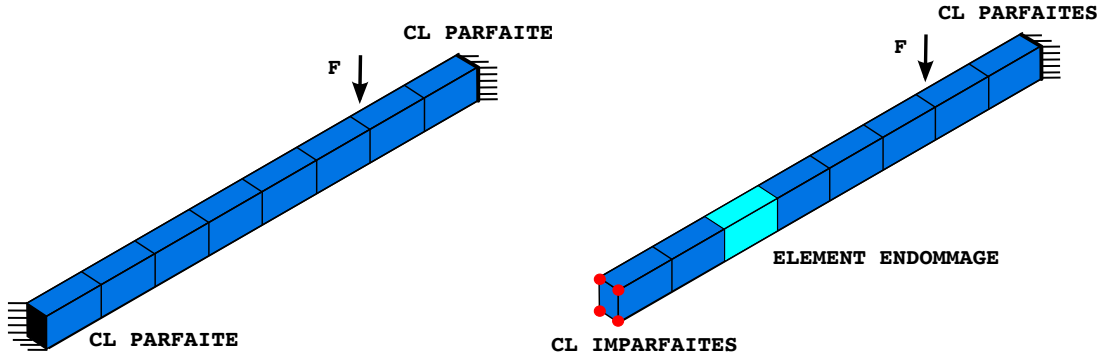


FIGURE 1 – Modèles EF de référence homogène avec encastrements parfait (gauche) et avec endommagement et impédance d'encastrement (droite).

Localisation des zones de défaut de modélisation. La première étape consiste à identifier les regions de la structure qui diffèrent le plus de l'état réel. Pour ce faire, nous évaluons la valeur de e_N^2 proposée dans (4) dans la plage de fréquences d'intérêt $\omega \in \mathcal{F} = [0 \text{ Hz}, 600 \text{ Hz}] \times 2\pi$. Dans notre cas, étant donné que aucune fréquence présente plus d'intérêt qu'une autre dans \mathcal{F} , nous choisissons :

$$\eta(\omega) = \frac{1}{600 \times 2\pi}$$

Dans la figure 2, la courbe bleue montre le spectre de e_N^2 sur \mathcal{F} . Les valeurs maximales du spectre se trouvent autour de 80Hz, ce qui est proche de la fréquence propre de l'impédance (5), placée volontairement à 87,5Hz. Les fréquences pour lesquelles la valeur de e_N^2 chute soudainement correspondent à des fréquences où la structure a une réponse orthogonale à la direction des capteurs. Par ailleurs, dans cette figure on compare, à titre d'exemple, ce résultat avec celui d'une structure contenant uniquement de l'erreur d'encastrement en absence endommagement. On pourra constater comment la qualité du modèle reste sensiblement la même pour des basses fréquences, et c'est à partir de 200Hz que la présence d'endommagement dégrade la qualité du modèle.

Cette information permet d'améliorer notre connaissance *a priori* sur l'erreur globale de notre modèle au vue des mesures disponibles. La distribution de cette erreur au sein de la structure se fait en calculant la valeur de :

$$\frac{e_{K\omega}^2(\{u\}, \{v\}, \{w\})}{D_{\Omega\omega}^2(\{u\})} \quad (11)$$

où K est la région occupée par chaque élément de la maille. Les figures 3 et 4 montrent ce résultat, où l'indicateur (11) semble bien localiser les zones de défaut.

Ainsi, la méconnaissance *a priori* sur les erreurs de modèle se voit réduite et permet de faire un choix parcimonieux approprié du vecteur de paramètres θ à identifier.

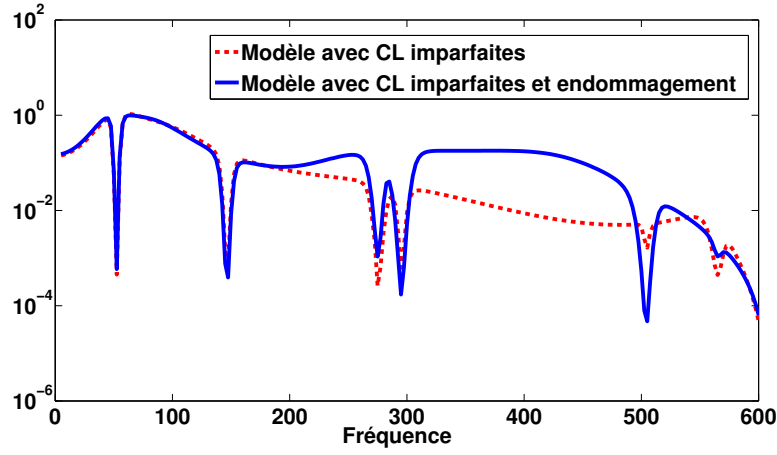


FIGURE 2 – Spectre de l'ERC modifiée pour des mesures avec CL imparfaites avec et sans endommagement.

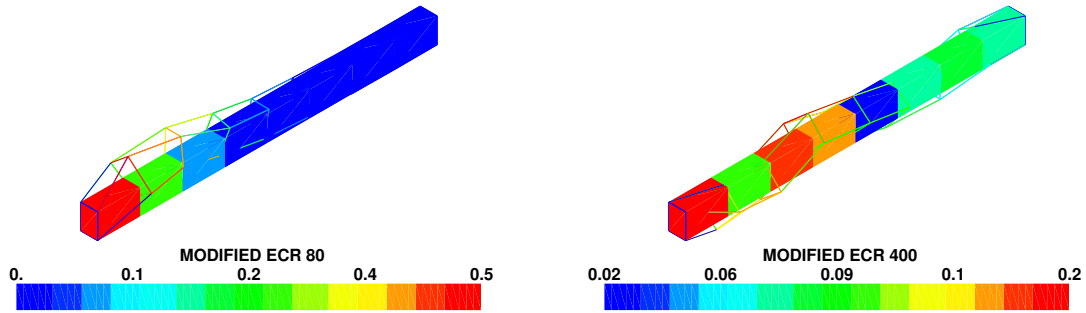


FIGURE 3 – Comparaison de la densité d'ERC modifiée associée à l'énergie potentielle, et champ de déplacement $\{u - v\}$ associé à l'ERC, aux fréquences 80Hz (gauche) et 400Hz (droite).

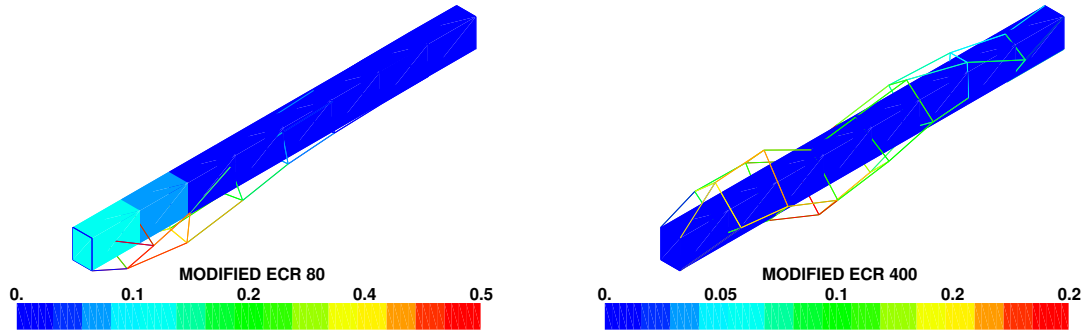


FIGURE 4 – Comparaison de la densité d'ERC modifiée associée à l'énergie cinétique, et champ de déplacement $\{u - w\}$ associé à l'ERC, aux fréquences 80Hz (gauche) et 400Hz (droite).

Application de la méthode UKF-mERC pour l'identification de paramètres constants. Dans l'analyse de l'ERC, la partie de e_N^2 introduite par le champ d'erreur $\{u - v\}$ est généralement associée à une erreur de paramétrisation de la matrice $[\mathbf{K}]$, tandis que celle introduite par $\{u - w\}$ s'associe davantage aux erreurs affectant la matrice $[\mathbf{M}]$ (voir [1] pour les détails heuristiques). Dans nos analyses, les contributions des champs d'erreur $\{u - v\}$ et $\{u - w\}$ sur e_N^2 ainsi que leur distribution spatiale permettent d'identifier un défaut de raideur sur l'élément contenant de l'endommagement ainsi que des erreurs de masse et raideur sur l'élément adjacent à l'encastrement imparfait. Ainsi, il paraît naturel de choisir les paramètres à identifier comme

$$\theta = \{\delta_6 \quad k \quad m\}^T$$

où k et m sont les paramètres d'une impédance d'interface, et δ_6 l'endommagement de l'élément 6 du maillage. Le problème d'identification réduit sera alors résolu par la méthode conjointe ERC-UKF

proposée en Sec. 4. La figure 5 montre la capacité de l'UKF à identifier correctement les paramètres d'impédance d'interface ainsi que l'endommagement structurel.

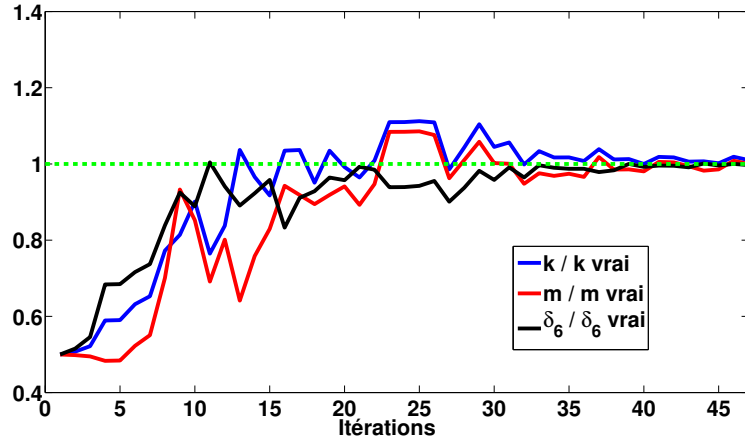


FIGURE 5 – Identification des paramètres d'impédance et d'endommagement avec l'approche ERC-UKF.

Application de la méthode UKF-mERC pour l'identification de paramètres évolutifs. La même expérience numérique a ensuite été réalisée dans le cas où la structure subit une évolution de l'endommagement structurel au cours du temps. Pour ce faire, nous avons considéré un ensemble de mesures $\{\tilde{u}\}_i$ correspondant à des instants $t_i = i\Delta t$ pendant lesquels l'endommagement progresse, aucune connaissance *a priori* de l'évolution n'étant disponible. Ainsi, les mesures $\{\tilde{u}\}_i$ sont introduites de manière récursive dans $e_N^2(\theta_i)$. On notera ici, que les itérations j de (10) deviennent des instants de temps i . Le problème d'évolution peut s'écrire :

$$\begin{cases} \theta_{i+1} = \theta_i + w_i^\theta \\ \zeta_i = e_N^2(\theta_i, \{\tilde{u}\}_i) + v_i \end{cases}$$

La figure 6 illustre alors comment la méthode permet également d'identifier à la fois des paramètres d'impédance ainsi que d'endommagement évolutif dont l'évolution est *a priori* inconnue.

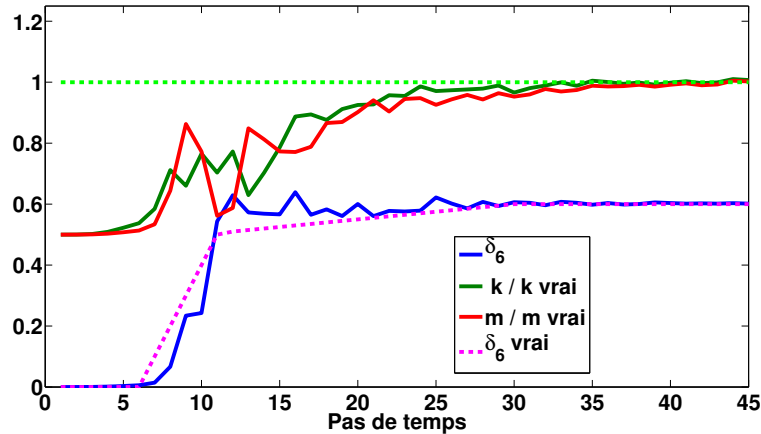


FIGURE 6 – Identification des paramètres d'impédance et d'endommagement évolutif avec l'approche ERC-UKF.

6 Conclusions

Cette communication propose une stratégie pour traiter le problème d'identification structurale avec méconnaissance *a priori* de la nature et la localisation des erreurs de modèle. Celle-ci est basée sur

l'utilisation conjointe de l'erreur en relation en comportement et du filtre de Kalman *Unscented* (UKF). Dans un premier temps, les paramètres à identifier sont sélectionnés par le biais de la méthode d'ERC, permettant une localisation spatiale des erreurs de modélisation. Le problème d'identification est ensuite résolu avec le UKF, qui présente l'avantage d'éviter tout calcul explicite de jacobien ou de hessien. Dans un exemple numérique d'une poutre en béton, nous avons montré la capacité de la méthode à identifier des erreurs de modélisation de nature différente sans connaissance *a priori* sur leur localisation ni leur nature, puis à reconstruire un paramètre évolutif sans information *a priori* sur cette évolution.

Références

- [1] J. Ben Abdallah. *Inversion Gaussienne appliquée à la correction paramétrique de modèles structuraux*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 1995.
- [2] A. Corigliano, S. Mariani. Parameter identification in explicit structural dynamics : performance of the extended Kalman filter. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **193** :3807-3835, 2004.
- [3] A. Deraemaeker, P. Ladevèze, P.H. Leconte, Reduced bases for model updating in structural dynamics based on constitutive relation error. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **191** :2427-2444, 2002.
- [4] P. Feissel. *Vers une stratégie d'identification en dynamique rapide pour des données incertaines*. Thèse de doctorat, ENS-Cachan, 2003.
- [5] P. Feissel, O. Allix. Modified constitutive Relation Error identification Strategy for transient dynamics with corrupted data : The elastic case. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **196** : 1968-1983, 2006.
- [6] K. Hadj-Sassi. *Une stratégie d'identification conjointe des paramètres et de l'état de Structures à comportements non-linéaires. Assimilation de données et erreur en loi de comportement*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 2007.
- [7] S.J. Julier, J.K. Uhlmann. *A general method for approximating nonlinear transformations of probability distributions*, Department of Engineering Science, University of Oxford, 1996.
- [8] S.J. Julier, J.K. Uhlmann, A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems. Proceedings of AeroSense : The 11th Int. Symposium on Aerospace/Defense, Sensing and Simulation and Controls, Orlando, USA, 1997.
- [9] R.E. Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME, Ser. D, Journal of Basic Engineering*, **82** :34-45, 1960.
- [10] P. Ladevèze, M. Reynier, A localization method of stiffness errors for the adjustment of FE models, ASME publishers, 1989.
- [11] P. Ladevèze. *Error in the constitutive relations in structural dynamics : theory and application to model updating*, LMT Cachan, 1993.
- [12] P. Ladevèze. *Comparaison des modèles des milieux continus*, Université Pierre-et-Marie-Curie, 1975.
- [13] H. Nguyen, O.Allix, P.Feissel, A robust identification strategy for rate-dependent models in dynamics. *Inverse Problems*, **24** : 1-24, 2008.